Ad-soyad :

Numara : Cevaplar

Lineer Cebir II Final Sınavı Soruları **20.06.2023**

NOT : Süre 90 dakikadır. Başarılar.

1) Aşağıdaki matris çarpımlarını hesaplayınız (20 p).

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 13 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) detA=? (6 p) b) adjA=? (7 p) c) Varsa $A^{-1} = ?$ (7 p)

3) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{cases} x + ay + 3z = 0 \\ 3x + (2+4a)y + (b+9)z = 0 \\ 2x + (2a+b+1)y + 6z = 0 \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor. Bu lineer denklem sisteminin

a) sonsuz sayıda (10 p)

b) tek çözümünün olması için a ve b sayılarını belirleyiniz (10 p).

4) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ permütasyonu veriliyor.

a) σ yı ayrık dairesel permütasyonların çarpımı olarak yazınız (5 p).

b) σ yı transpozisyonların çarpımı olarak yazınız (5 p).

c) σ tek midir, çift midir? (5 p)

d) $\sigma^{-1} = ?$ (5 p)

5) V, F cismi üzerinde vektör uzayı, $A : V \to V$ lineer dönüşüm, λ_1, λ_2 ise A nın birbirinden farklı karakteristik değerleri olsun. λ_1 ve λ_2 karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörler, sırasıyla, α_1 ve α_2 ise α_1 ve α_2 nin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz (20 p).

1) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 13 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 5 \\ 47 & 117 & 11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 58 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 & -1 \\ 6 & 14 & 12 & -2 \\ 9 & 21 & 18 & -3 \end{bmatrix}$

2) a) $\det A = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}_{13} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{-19} = 52 + 38 = 90$

b) $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 34$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$A_{21} = 4$, $A_{22} = -22$, $A_{23} = 8$, $A_{31} = 13$, $A_{32} = -49$, $A_{33} = -19$

$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 34 & 4 \\ 4 & -22 & 8 \\ 13 & -49 & -19 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix}$

c) $\det A = 90 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ vardır.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1/45 & 2/45 & 13/90 \\ 17/45 & -11/45 & -49/90 \\ 2/45 & 4/45 & -19/90 \end{bmatrix}$

3) Sistemin katsayılar matrisine elementer işlemler uygulayalım.

$\begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 3 & 2+4a & b+9 \\ 2 & 2a+b+1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & b \\ 0 & b+1 & 0 \end{bmatrix} = R$

$\det R = -(b+1)b = 0 \Leftrightarrow b=0$ veya $b=-1$

a) $b=0$ veya $b=-1$ ise $\det R = 0$ olup sonsuz çözüm vardır.

b) $b\neq 0$ ve $b\neq -1$ ise $\det R \neq 0$ olup tek çözüm vardır.

a sayısının sistemin çözümüne etkisi yoktur.

4) a) $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1,3,5)(2,4,6)$$

b) $\sigma = (1,5)(1,3)(2,6)(2,4)$

c) σ nın transpozisyon sayısı 4 olup σ çift permütasyondur.

d) $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

5) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun.

$i=1,2$, α_i, λ_i ye karşılık gelen karakteristik vektör $\Rightarrow A(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, $i=1,2$

$c_1, c_2 \in F$ olmak üzere $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ (1) olsun.

$\Rightarrow A(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = A(0)$

$\Rightarrow$ A lineer olup $c_1 A(\alpha_1) + c_2 A(\alpha_2) = 0$

$\Rightarrow A(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_i$, $i=1,2$ olup $c_1\lambda_1\alpha_1 + c_2\lambda_2\alpha_2 = 0$ (2)

(1) eşitliğini λ_1 ile çarparsak $\lambda_1 c_1\alpha_1 + \lambda_1 c_2\alpha_2 = 0$ (3) olur.

(2) den (3) ü çıkarırsak

$$\begin{array}{r} c_1\lambda_1\alpha_1 + c_2\lambda_2\alpha_2 = 0 \\ -\,(\lambda_1 c_1\alpha_1 + \lambda_1 c_2\alpha_2) = 0 \\ \hline c_2\lambda_2\alpha_2 - \lambda_1 c_2\alpha_2 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow c_2\underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0}\underbrace{\alpha_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ dır. (α_2 karakteristik vektör $\Rightarrow \alpha_2 \neq 0$)

(1) eşitliğini λ_2 ile çarpıp elde edilen eşitliği (2) den çıkarırsak $c_1 = 0$ elde edilir.

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ olup α_1, α_2 lineer bağımsızdır.